数理解析研究所講究録
第 1781 巻 2012 年 59-65

Coarse Baum-Connes Conjecture for Relatively Hyperbolic Groups

深谷友宏*

京都大学理学研究科数学教室

概要

相対双曲群の coarse Baum-Connes 予想について，尾國新一氏との共同研究で得られた結果に付いて解説する．

1 Coarse Baum-Connes 予想と相対双曲群

X を proper な距離空間とする．次の coarse assembly map

$$\mu_X : KX_*(X) \to K_*(C^*(X)).$$

が同型であるとき，X に対して coarse Baum-Connes 予想が成り立つという．詳しくは [4] を参照せよ．可算群 G は適当な G-不変距離を用いて距離空間と見なせる．もし G に対して coarse Baum-Connes 予想が成立し，G の分類空間 BG を有限単体複体で実現できるなら，descent principal と呼ばれる議論 [14, Theorem 8.4] により，G に対する analytic Novikov 予想が成立する，すなわち assembly map

$$\mu\colon K_*(BG) \to K_*(C_r^*(G))$$

は単射である．

G を有限生成群とし，$\mathbb{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$ を無限部分群の有限族とする．後述の意味で G が $\mathbb{P}$ に関して相対的に双曲的であるとき，$(G, \mathbb{P})$ を相対双曲群と呼ぶ．この種の群に対する coarse Baum-Connes 予想に関する研究は多数ある．$(G, \mathbb{P})$ を相対双曲群とするこのとき：

* Tomohiro Fukaya (tomo@math.kyoto-u.ac.jp)

- 全ての $P \in \mathbb{P}$ の漸近次元が有限であるならば，G の漸近次元も有限 [11].
- 全ての $P \in \mathbb{P}$ が exact group であれば，G も exact group [12].
- 全ての $P \in \mathbb{P}$ が可分 Hilbert 空間に coarse 埋め込み可能であるならば，G も可分 Hilbert 空間に coarse 埋め込み可能 [1].

なお，有限生成群 G の漸近次元が有限であったり，可分 Hilbert 空間に coarse 埋め込み可能であれば，G に対する coarse Baum-Connes 予想が成り立つ事が Yu[16] によって証明されている．これに対し，我々の共同研究では以下の結果が得られている．

定理 1.1 (尾國-深谷 [2]). $(G, \mathbb{P})$ を相対双曲群とする．$\mathbb{P}$ に属する全ての部分群 P について，以下を仮定する：

1. P の proper 作用の普遍空間 $\underline{E}P$ で，有限次元の単体複体であるものが存在する．
2. P は coarse Baum-Connes 予想を満たす．

このとき G に対し coarse Baum-Connes 予想が成り立つ．さらに G が torsion 元を持たなければ G に対し analytic Novikov 予想が成り立つ．

2 Groves-Manning に依る相対双曲群の定義

相対双曲群の定義には，境界への群作用に依る特徴付けや，coned-off ケイリーグラフを用いるもの等があるが，ここでは Groves-Manning[3] による組み合わせ論的ホロボールを用いた定義を導入する．これらの定義の相互関係は Hruska[7] がまとめている．

定義 2.1. (P, d) を距離空間とする．P を底とする**組み合わせホロボール** $\mathcal{H}(P)$ とは以下で定義されるグラフである：

1. $\mathcal{H}(P)^{(0)} = P \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$.
2. $\mathcal{H}(P)^{(1)}$ は次の 2 種類の辺から成る：
   (a) 各 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $p, q \in P$ に対し, $0 < d(p,q) \leq 2^l$ であるとき，(p,l) と (q,l) を結ぶ辺が存在する．
   (b) 各 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $p \in P$ に対し, (p,l) と $(p,l+1)$ を結ぶ辺が存在する．

ここで $\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す．$\mathcal{H}(P)$ にグラフの構造を用いて距離を定めると，Gromov の意味での双曲空間になる．また部分集合 $I \subset \mathbb{R}$ に対し，$\mathcal{H}(P; I)$ は $P \times (I \cap (\mathbb{N} \cup \{0\}))$ で張られる $\mathcal{H}(P)$ の部分グラフを表すとする．

次に G を有限生成群とし，$\mathbb{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$ を無限部分群の有限族とする．各 P_i の指数は無限大であると仮定する．また G の有限生成系 $\mathcal{S}$ を固定する．ここで $\mathcal{S}$ は対称，すなわち $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}$. であると仮定する．$G$ は $\mathcal{S}$ から定まる語距離 $d_{\mathcal{S}}$ により距離空間に成る．G の元の列 $g_1, g_2, \cdots$ を，各 $r \in \{1, \ldots, k\}$ に対して，写像 $\mathbb{N} \to G/P_r$ が全単射に成る様に選ぶ．また各 $i = ak + r \in \mathbb{N}$ に対し，$P_{(i)}$ により部分群 P_r を表すとする．このとき全ての剰余集合の集合 $\bigsqcup_{r=1}^{k} G/P_r$ には写像 $\mathbb{N} \ni i \mapsto g_i P_{(i)}$ により順序が与えられる．各剰余集合 $g_i P_{(i)}$ は $d_{\mathcal{S}}$ を制限した距離 d_i を持つ．Γ を $(G, \mathcal{S})$ のケイリーグラフとする．写像 $\psi_i \colon \mathcal{H}(g_i P_{(i)}; \{0\}) \hookrightarrow \Gamma$ が各 $x \in g_i P_{(i)}$ に対し $\psi_i(x, 0) = x$ で与えられる．これにより組み合わせホロボール $\mathcal{H}(g_i P_{(i)})$ の底と Γ の部分集合が同一視される．

定義 2.2. 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し，ψ_i による同一視を用いて $\mathcal{H}(g_i P_{(i)})$ の底を Γ に貼付けることにより構成されるグラフを **Groves-Manning 空間** と呼び，$X(G, \mathbb{P}, \mathcal{S})$ で表す．

$$X(G, \mathbb{P}, \mathcal{S}) = \Gamma \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(g_i P_{(i)}).$$

$X(G, \mathbb{P}, \mathcal{S})$ はグラフの構造から定まる距離を持つ．

定義 2.3. Groves-Manning 空間 $X(G, \mathbb{P}, \mathcal{S})$ が Gromov の意味で双曲的であるとき，$(G, \mathbb{P})$ は相対双曲群であるという．

3 証明のあらすじ

3.1 Coarse Mayer-Vietoris 完全列

定理 1.1 の証明で重要な役割を果たす，coarse Mayer-Vietoris 完全列について解説する．まず coarse geometry のカテゴリーに於ける切除対の概念を導入する．距離空間 M，部分集合 A と正数 R に対し，$\mathrm{Pen}(A; R)$ で A の M に於ける R-近傍を表す．すなわち $\mathrm{Pen}(A; R) = \{p \in M : d(p, A) \leq R\}$.

定義 3.1. M を距離空間，A と B を閉部分集合で $M = A \cup B$ を満たすものとする．任意の $R > 0$ に対しある $S > 0$ が存在して

$$\mathrm{Pen}(A; R) \cap \mathrm{Pen}(B; R) \subset \mathrm{Pen}(A \cap B; S)$$

を満たすとき，$M = A \cup B$ を ω-切除対と呼ぶ．

Higson-Roe[6] はこの ω-切除対に対して，Roe 代数の K-群の Mayer-Vietoris 完全列

を証明した．また Mitchener[9][10] は coarse ホモロジー理論に於ける Mayer-Vietoris 完全列を考察している．

定理 3.2. $M = A \cup B$ を ω-切除対とする．このとき，次の図式は可換であり，上下二つの横の列はそれぞれ完全である．

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to KX_p(A\cap B) & \longrightarrow & KX_p(A) \oplus KX_p(B) & \longrightarrow & KX_p(M) & \longrightarrow & KX_{p-1}(A\cap B) \to \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\to K_p(C^*(A\cap B)) & \longrightarrow & K_p(C^*(A)) \oplus K_p(C^*(B)) & \longrightarrow & K_p(C^*(M)) & \longrightarrow & K_{p-1}(C^*(A\cap B)) \to .
\end{array}$$

ここで，縦の写像は coarse assembly map である．

3.2 証明の基本的なアイディア

$(G, \mathbb{P})$ を相対双曲群で定理 1.1 の仮定を満たすものとする．

定義 3.3. 以下の記号を導入する．

$$X_n = \Gamma \cup \bigcup_{i \geq n} \mathcal{H}(g_i P_{(i)});$$
$$X_\infty = \bigcap_{n \geq 1} X_n.$$

定義から分かるように，X_n は Grove-Manning 空間 $X(G, \mathbb{P}, \mathcal{S})$ から最初の $n-1$ 個のホロボールを取り除いたものである．特に $X_1 = X(G, \mathbb{P}, \mathcal{S})$, $X_\infty = \Gamma$ である．

$(G, \mathbb{P})$ が相対双曲群であるという仮定より，X_1 は Gromov の意味で双曲的である．従って Higson-Roe[4] の結果より，X_1 に対して coarse Baum-Connes 予想が成立する．ω-切除対 $X_n = X_{n+1} \cup \mathcal{H}(g_n P_{(n)})$ に対して定理 3.2 を適用する事により帰納的に X_n に対して coarse Baum-Connes 予想が成立する事が示される．

命題 3.4. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，coarse assembly map $\mu\colon KX_*(X_n) \to K_*(C^*(X_n))$ は同型．

本当に知りたいのは X_∞ に関する情報であるが，その為に射影極限のホモロジーを考察する必要がある．そこで距離空間の列 $Y_1 \supset Y_2 \supset \cdots$ を考える．極限 $Y_\infty = \cap Y_n$ の coarse K-ホモロジーを計算する為に，次のような列を考察してみよう．

$$0 \to \varprojlim{}^1 KX_{p+1}(Y_n) \to KX_p(Y_\infty) \to \varprojlim KX_p(Y_n) \to 0. \tag{1}$$

残念ながら，一般に (1) は完全列ではない．実際 $Y_n = \mathbb{R} \backslash [-n, n]$ の場合には $KX_1(Y_n) = KX_1(\mathbb{R}) = K_1(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ である事から，(1) は完全列に成らないことがわかる．そこで

X_n を別の良い空間で置き換えて，coarse K-ホモロジーを K-ホモロジーで置き換える事を考える．

3.3 Proper 作用の分類空間と Weak Coarsening

距離空間 M に対し，M と coarse 同型な単体複体 EM で，単体複体の構造と適合する距離を持ち，一様可縮で有界幾何学を持つ空間のことを M の *coarsening* と呼ぶ [14, Definition 2.4]．coarsening は coarse K-ホモロジーと K-ホモロジーをつなぐ役割を果たす．

命題 3.5 ([4])**.** 距離空間 M が coarsening EM を持つとき，$KX_*(M) \cong K_*(EM)$.

有限生成群 H の proper 作用の分類空間 $\underline{E}H$ が有限次元単体複体として実現されていれば，それは H の coarsening である．なお，H が torsion 元を持たなければ，$\underline{E}H/H$ は分類空間 BH と見なせる．離散群の proper 作用とその普遍空間については [8][15] を参照せよ．

仮定より各 $P_i \in \mathbb{P}$ の proper 作用の普遍空間 $\underline{E}P_i$ を有限次元単体複体で実現できる事から，G 自身の proper 作用の普遍空間 $\underline{E}G$ も有限次元単体複体で各 $\underline{E}P_i$ を部分複体として自然に含むもので実現できる [2, Appendix A].

定義 3.6. 以下の記号を導入する．

$$EX_n = \underline{E}G \cup \bigcup_{i \geq n} (g_i \underline{E}P_{(i)} \times [0, \infty));$$
$$EX_\infty = \bigcap_{n \geq 1} EX_n.$$

$\underline{E}G$ には $X(G, \mathbb{P}, \mathcal{S})$ と coarse 同型に成るような距離を定めることができるが，その距離に関して一様可縮ではなく，有界幾何学も持たない．従って EX_n は上述の意味での coarsening ではない．しかし次の命題から，EX_n は X_n の *weak coarsening* であると言える．

命題 3.7 ([2])**.** 自然な同型 $KX_*(X_n) \cong K_*(X_n)$ が成立する．

証明は anti-Čech 系列と ω-切除対を巧妙に調節しながら極限を取る事により行われる．この議論が論文 [2] の大半を占める．

3.4 証明の完結

コンパクト距離空間の列 $M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ に対し，次の完全列が存在する [5, Proposition 7.3.4].

$$0 \to \varprojlim{}^1 K_{p+1}(M_n) \to K_p(\cap M_n) \to \varprojlim K_p(M_n) \to 0.$$

ここで使われている K-ホモロジーは一点コンパクト化の被約 K-ホモロジーである [5, Definition 5.2.7] ことから次の完全列を得る.

$$0 \to \varprojlim{}^1 K_{p+1}(EX_n) \to K_p(EX_\infty) \to \varprojlim K_p(EX_n) \to 0. \tag{2}$$

次に Roe 代数の K 群について考察する. H を Hilbert 空間とし，ρ を $C_0(X_1)$ の H への ample な表現とする. Roe 代数 $C^*(X_1, H)$ は H へ作用するある有界線型作用素達の成す代数のノルム閉包として定義される [5, Definition 6.3.8]. 制限 ρ: $C_0(X_n) \to \mathfrak{B}(\overline{C_0(X_n)\mathrm{H}})$ は $C_0(X_n)$ の ample な表現を与える. これにより $C^*(X_n, \overline{C_0(X_n)\mathrm{H}})$ は $C^*(X_1, \mathrm{H})$ の自然な部分 C^*-環と見なせる. 実際：

$$C^*(X_n, \overline{C_0(X_n)\mathrm{H}}) = \{T \in C^*(X_1, \mathrm{H}) : \operatorname{supp} T \subset X_n \times X_n\}.$$

以下では $C^*(X_n, \overline{C_0(X_n)\mathrm{H}})$ を $C^*(X_n)$ と省略する.

Phillips による C^*-環の射影極限の K 群の考察 [13] を用いて次の完全列を得る.

$$0 \to \varprojlim{}^1 K_{p+1}(C^*(X_n)) \to K_p(C^*(X_\infty)) \to \varprojlim K_p(C^*(X_n)) \to 0. \tag{3}$$

完全列 (2), (3) 及び命題 3.4, 3.7 を合わせる事により，coarse assembly map μ: $KX_*(X_\infty) \to K_*(C^*(X_\infty))$ が同型であることが示される.

参考文献

[1] Marius Dadarlat and Erik Guentner, *Uniform embeddability of relatively hyperbolic groups*, J. Reine Angew. Math. **612** (2007), 1–15.

[2] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Ogun, *The coarse baum-connes conjecture for relatively hyperbolic groups*, To be appeared in Journal of Topology and Analysis, `http://arxiv.org/abs/1109.6377`.

[3] Daniel Groves and Jason Fox Manning, *Dehn filling in relatively hyperbolic groups*, Israel J. Math. **168** (2008), 317–429.

[4] Nigel Higson and John Roe, *On the coarse Baum-Connes conjecture*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 227, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 227–254.

[5] ———, *Analytic K-homology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000, Oxford Science Publications.

[6] Nigel Higson, John Roe, and Guoliang Yu, *A coarse Mayer-Vietoris principle*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **114** (1993), no. 1, 85–97.

[7] G. Christopher Hruska, *Relative hyperbolicity and relative quasiconvexity for countable groups*, Algebr. Geom. Topol. **10** (2010), no. 3, 1807–1856.

[8] Guido Mislin and Alain Valette, *Proper group actions and the Baum-Connes conjecture*, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[9] Paul D. Mitchener, *Coarse homology theories*, Algebr. Geom. Topol. **1** (2001), 271–297 (electronic).

[10] ———, *Addendum to: "Coarse homology theories" [Algebr. Geom. Topol.* **1** *(2001), 271–297 (electronic); mr1834777]*, Algebr. Geom. Topol. **3** (2003), 1089–1101 (electronic).

[11] D. Osin, *Asymptotic dimension of relatively hyperbolic groups*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 35, 2143–2161.

[12] Narutaka Ozawa, *Boundary amenability of relatively hyperbolic groups*, Topology Appl. **153** (2006), no. 14, 2624–2630.

[13] N. Christopher Phillips, *Representable K-theory for σ-C^*-algebras*, K-Theory **3** (1989), no. 5, 441–478.

[14] John Roe, *Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 90, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1996.

[15] Alain Valette, *Introduction to the Baum-Connes conjecture*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, From notes taken by Indira Chatterji, With an appendix by Guido Mislin.

[16] Guoliang Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), no. 1, 201–240.